* supposons que : $0 \le V_n \le (0,84)^n$ *et* montrons que : $0 \le V_{n+1} \le (0,84)^{n+1}$

• $V_{n+1} \ge 0$ d'aprés 4) b)

• $\frac{V_{n+1}}{V_n} \le 0,84 \Rightarrow V_{n+1} \le (0,84).V_n \Rightarrow V_{n+1} \le (0,84).(0,84)^n$

d'où $0 \le V_{n+1} \le (0,84)^{n+1}$

conclusion : $0 \le V_n \le (0,84)^n$

d) $0 \le V_n \le (0,84)^n$ *or* $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,84)^n = 0$ car $0,84 \in]-1,1[$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

$U_n = \frac{3}{8} - V_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{3}{8}$

c) on a : $0 \le \frac{3}{8} - U_n \le (0,84)^n \ ; \forall n \in \mathbb{N}$

$(0,84)^n \le 10^{-5} \Rightarrow$ (*calculatrice*) $n_0 \ge 67$

EXERCICE№19

1) $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-5}{x^2}\right) = \frac{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{2x^2}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\sqrt{5}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\sqrt{5}$	↗	$+\infty$

2) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \ , \ n \ge 0 \end{cases}$

Montrons par récurrence que : $U_n > \sqrt{5}$; pour $n \ge 0$

* $U_0 = 3 > \sqrt{5}$ (vraie)

* supposons que : $U_n > \sqrt{5}$ et montrons que : $U_{n+1} > \sqrt{5}$

$U_n > \sqrt{5} \Rightarrow f(U_n) > f(\sqrt{5})$ car f est strictement croissante sur $[\sqrt{5}, +\infty[$

D'où : $U_{n+1} > \sqrt{5}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn